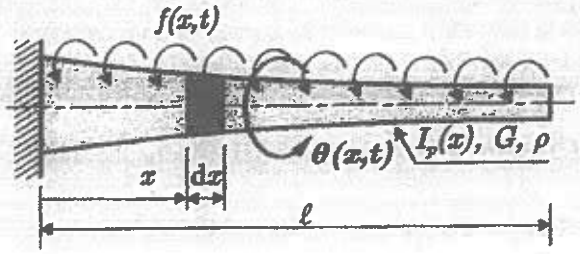
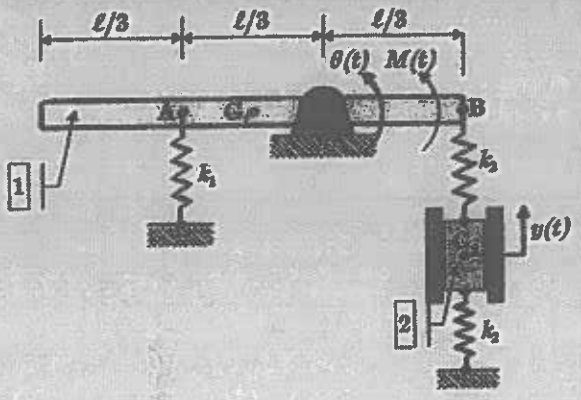
1) (2 val) A vibração mecânica pode definir-se como um movimento alternado em torno de uma posição de referência.
   a) (25%) Indicar quais os elementos constituintes de um sistema vibratório;
   b) (25%) Explicar, do ponto de vista energético, o fenómeno da vibração;
   c) (25%) Definir frequência natural de vibração;
   d) (25%) Definir frequência de ressonância de amplitude.

2) (2 val) O isolamento de vibrações consiste em reduzir a grandeza de forças transmitidas por equipamentos para as suas fundações ou em reduzir o movimento de apoios móveis para os equipamentos.
   a) (25%) Definir transmissibilidade absoluta e relativa. Representar graficamente e lado a lado a TR_{abs} e a TR_{rel}, indicando eventuais pontos notáveis.
   b) (25%) Discutir a eficiência do isolamento em termos da massa do equipamento e da rigidez da suspensão;
   c) (25%) Justificar a razão pela qual, em geral, não se considera o amortecimento no dimensionamento de uma suspensão elástica para isolamento de vibrações;
   d) (25%) Para uma excitação multi frequência, indicar, justificando, qual a frequência a considerar no dimensionamento da suspensão elástica.

3) (2 val) O comportamento vibratório de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}$ e $\{\dot{x}(t=0)\}$.
   a) (25%) Caracterizar as matrizes de massa e de rigidez;
   b) (25%) Caracterizar as equações de movimento na base modal ou natural;
   c) (25%) Mostrar como a resposta $\{x(t)\}$ do sistema é dada pela combinação linear (sobreposição) dos modos naturais de vibração;
   d) (25%) Com base nas frequências naturais ω_1 e ω_2 e nos amortecimentos modais ξ_1 e ξ_2 de um sistema com 2 graus de liberdade, estabelecer duas equações que permitam determinar os parâmetros α e β de uma matriz de amortecimento proporcional, $[c]=\alpha[m]+\beta[k]$. Referir o interesse de uma matriz de amortecimento proporcional.

4) (2 val.) Na figura representa-se um veio de comprimento ℓ em vibração de torção descrita pelo campo de deslocamento angular $\theta(x,t)$ que se pode exprimir na forma $\theta(x,t)=\Theta(x)g(t)$.
   a) (40%) Considerar um elemento infinitesimal de veio e, por aplicação da 2ª lei de Newton, estabelecer a equação de equilíbrio dinâmico;
   b) (30%) Explicar o significado físico da solução $\theta(x,t)$ expressa na forma $\theta(x,t)=\Theta(x)g(t)$;
   c) (30%) Escrever as expressões que traduzem as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das funções características $\Theta_r(x)$ $r=1,\ldots,\infty$ representativas das formas naturais de vibração.





2) (4 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por dois corpos. O corpo 1 é uma barra de comprimento ℓ, que roda em torno do ponto fixo O, sob a acção do momento motor $M(t)$; os pontos A e B da barra estão ligados a molas lineares. O corpo 2 é uma massa que se encontra ligada a uma mola em cada extremidade. Na situação de equilíbrio estático, $\theta = 0$ e $y = 0$. A dissipação de energia no sistema é desprezável.

a) (30%) Estabelecer as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 & -1200 \\ -1200 & 12000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

b) (15%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

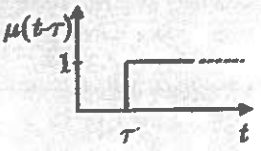
c) (15%) Escrever as equações de movimento na base modal.

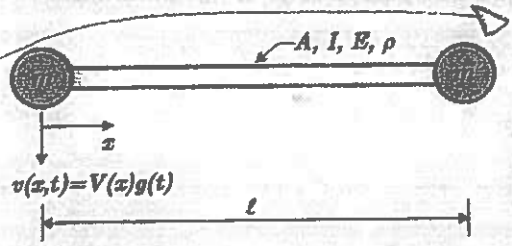
d) (20%) Calcular a expressão da amplitude $\Theta(\omega)$ de rotação da barra em função da frequência de excitação, quando $M(t) = M_0 \cos(\omega t)$ e considerando apenas o regime estacionário. Esboçar graficamente a variação da amplitude de $y(t)$ em função da frequência, assinalando eventuais pontos notáveis.

e) (20%) Determinar o limite superior da resposta $\theta(t)$ à solicitação do tipo,

$$\begin{cases} M(t) = M_0 \cos(\omega t), & t \le \tau \\ M(t) = M_0 \cos(\omega t) + \mu(t-\tau) M_1, & t > \tau \end{cases}$$

onde M_0 e M_1 são constantes e $\mu(t-\tau)$ é a função degrau unitário aplicado no instante $t = \tau$.





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I possui em cada uma das suas extremidades uma massa concentrada m. O material da viga apresenta módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. A viga encontra-se livre-livre e possui um modo de corpo rígido (translação e/ou rotação) com energia elástica nula e frequência nula.

a) (20%) Escrever e classificar as condições de fronteira da viga.

b) (20%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = \frac{2}{\pi} - \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)$ como aproximação da primeira forma natural de vibração (com energia elástica não nula) no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $V(x)$.

c) (30%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração utilizando o quociente de Rayleigh. Exprimir o resultado em função de $\varepsilon = \frac{m}{\rho A \ell}$. Esboçar graficamente a variação da frequência em função de ε.

d) (30%) Indicar o valor exacto da frequência natural quando $m \to 0$. Comparar com o resultado aproximado obtido na alínea anterior e comentar.

Exame 1ª Chamada 2008/06/11

PARTE TEÓRICA

③.

a) Matriz de massa: simétrica e definida positiva.

Matriz de rigidez: simétrica e normalmente definida positiva mas no caso de sistemas semi-definidos, designada por matriz semi-de positiva.

b) São equações desacopladas em termos de inércia e de rigidez mas que só estão desacopladas em termos de amortecimento se a matriz [C] obedecer à condição de Caughey, (ou, de forma redutora) à condição de amortecimento proporcional. Este desacoplamento torna a obtenção da solução, em termos de coordenadas modais, mais simples porque se pode resolver cada equação diferencial como se resolve uma equação diferencial de movimento de 1 sistema com 1 grau de liberdade

MAL

c) Para mostrar isto basta demonstrar que os modos naturais de vibração são linearmente independentes e que portanto formam uma base da qual qualquer vector no espaço de dimensão n pode ser definido (excluindo $x(t)$).

A independência linear fica garantida se todos os vectores forem ortogonais entre si. Então basta demonstrar a ortogonalidade dos vectores modais:

$$[K]\{\phi\}_r = \omega^2 [m]\{\phi\}_r$$

$$\begin{cases} [K]\{\phi\}_r = \omega^2 [m]\{\phi\}_r & (1) \\ [K]\{\phi\}_s = \omega^2 [m]\{\phi\}_s & (2) \end{cases}$$

Pre-multiplicando (1) por $\{\phi\}_s^T$ e (2) por $\{\phi\}_r^T$

$$\begin{cases} \{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r & (3) \\ \{\phi\}_r^T [K]\{\phi\}_s = \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s & (4) \end{cases}$$

Aplicando a transposta a (3):

$$\{\phi\}_r^T [K] \{\phi\}_s = \omega_r^2 \{\phi\}_r^T [m] \{\phi\}_s \quad (5) \text{ com } [K]=[K]^T \quad [m]=[m]^T$$

Subtraindo (4) e (5)

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_R^2) \{\phi\}_r^T [m] \{\phi\}_s$$

$$\{\phi\}_r^T [m] \{\phi\}_s = 0 \qquad r, s, 1 \ldots m$$

logo

$$\{\phi\}_s^T [m] \{\phi\}_s = 0 \quad ; \quad \text{cqd} //$$

d) $$[\phi]^T [c] [\phi] = \alpha [\phi]^T [m] [\phi] + \beta [\phi]^T [K] [\phi]$$

$$= \alpha [I] + \beta [\Omega^2]$$

$$= [\alpha + \beta \Omega^2] = [2 \xi \Omega]$$

Então a projecção do sistema de eq. diferenciais do enunciado na base modal fica:

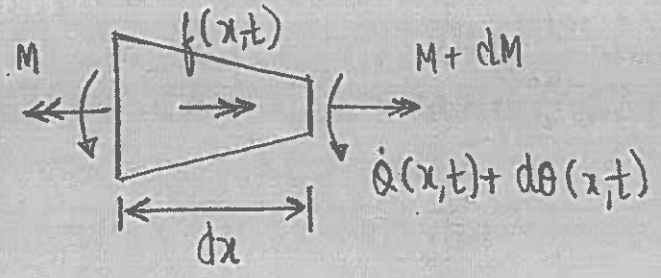
$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [2\xi\Omega] \{\dot{\eta}(t)\} + [\Omega^2] \{\eta(t)\} = [\phi]^T \{f(t)\}$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1(t) + \omega_1^2 \eta_1(t) = N_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 2\xi_2 \omega_2 \dot{\eta}_2(t) + \omega_2^2 \eta_2(t) = N_2(t) \end{cases}$$

Sendo:

$$\begin{cases} 2\xi_1 \omega_1 = \alpha + \beta \omega_1^2 \\ 2\xi_2 \omega_2 = \alpha + \beta \omega_2^2 \end{cases}$$

(4.) $\theta(x,t) = \theta(x)g(t)$



a) 2ª Lei de Newton : $\Sigma M = \Sigma K_r$

$$-M + M + dM + f(x,t)\,dx = \rho I_p(x)\,dx\,\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$$

$$M = G I_p \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \Rightarrow dM = \frac{\partial}{\partial x}\left(G I_p \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)dx$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G I_p \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t) = \rho I_p(x)\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} \qquad \text{c.q.d}$$

b) Ao conseguir-se separar a resposta em 2 influências distintas que nos dão a forma natural de vibração ($\theta(x)$) e a evolução dessa forma ao longo do tempo ($g(t)$), na obtenção da solução para θ, a eq. diferencial de equilíbrio dinâmico é muito facilitada pois pode-se usar o método de integração de variáveis separáveis.

c) Propriedades de ortogonalidade :

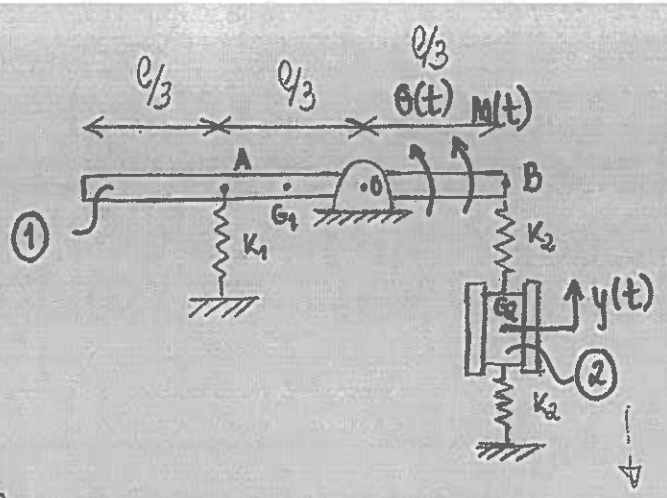
$$\int_0^\ell \theta_s(x)\,\ell\,I_p\,\theta_r(x)\,dx = \delta_{rs} \qquad r,s = 1 \ldots \infty$$

$$\int_0^\ell \frac{d\theta_s(x)}{dx} G I_p \frac{d\theta_r(x)}{dx}\,dx = \delta_{rs} \qquad r,s = 1 \ldots \infty$$

$$\text{com } \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{para } r = s \\ 0 & \text{“ } r \neq s \end{cases}$$

PARTE TRANCA

2.



a) $T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$ (energia cinética)

$$J_O = J_G + m_1 \overline{OG_1}^2 = \frac{1}{12} m_1 \ell^2 + m_1 \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{12} m_1 \ell^2 + \frac{1}{36} m_1 \ell^2 = \frac{1}{9} m_1 \ell^2$$

$$T = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{9} m_1 \ell^2\right) \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2(t)$$

$$V = \frac{1}{2} K \theta^2 \text{ (energia potencial)}$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 \left(\ell/3 \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{=\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} K_2 y^2(t) + \frac{1}{2} K_2 \left(\ell/3 \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{=\theta} - y\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} K_1 \left(\frac{\ell}{3}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} K_2 y^2 + \frac{1}{2} K_2 \left(\frac{\ell}{3}\theta - y\right)^2$$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = M \frac{\delta}{d\theta}(\theta) = M_t$$

$$Q_2 = M \frac{\delta}{dy}(\theta) = 0$$

Equações de Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_1}\right) - \frac{dT}{dq_1} + \frac{dV}{dq_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_2}\right) - \frac{dT}{dq_2} + \frac{dV}{dq_2} = Q_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{9} m_1 \ell^2 \dot{\theta} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{9} m_1 \ell^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = K_1 \frac{\ell^2}{9}\theta + K_2 \frac{\ell}{3}\left(\ell/3\,\theta - y\right)$$

———//———

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_2 \dot{y} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m_2 \ddot{y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = K_2 \cdot y - K_2\left(\frac{\ell}{3}\theta - y\right)$$

Substituindo:

$$\begin{cases} \frac{1}{9} m_1 \ell^2 \ddot{\theta} + K_1 \frac{\ell^2}{9}\theta + K_2 \frac{\ell}{3}\left(\ell/3\,\theta - y\right) = M(t) \\ m_2 \ddot{y} + K_2 y - K_2\left(\ell/3\,\theta - y\right) = 0 \end{cases}$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1/9\, m_1 \ell^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2)\frac{\ell^2}{9} & -K_2 \cdot \frac{\ell}{3} \\ -K_2 \frac{\ell}{3} & 2K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Utilizando:

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 & -1200 \\ -1200 & 12000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left| [K] - w^2 [m] \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 400 - 0{,}2w^2 & -1200 \\ -1200 & 12000 - 10w^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} w_1 = 25{,}728 \text{ rad/s} \\ w_2 = 50{,}379 \text{ rad/s} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 400 - 0{,}2\omega^2 & -1200 \\ -1200 & 12000 - 10\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(\omega) \\ y(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

1ª forma natural: $\omega^2 = 25{,}728^2$

$$-1200\,\theta(\omega) + (12000 - 10\omega^2)\cdot y(\omega) = 0$$

$$(12000 - 6619{,}3)\, y(\omega) = 1200\,\theta(\omega)$$

$$\theta(\omega) = 4{,}483\; y(\omega)$$

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} 4{,}483 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª forma natural: $\omega^2 = 50{,}379^2$

$$-1200\,\theta(\omega) + (12000 - 10\omega^2)\cdot y(\omega) = 0$$

$$(12000 - 25380)\, y(\omega) = 1200\,\theta(\omega)$$

$$\theta(\omega) = -11{,}15\; y(\omega)$$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -11{,}15 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) $$\{\phi_1\} = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T [m] \{u\}_1}} \cdot \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}1973 \\ 0{,}2671 \end{Bmatrix}$$

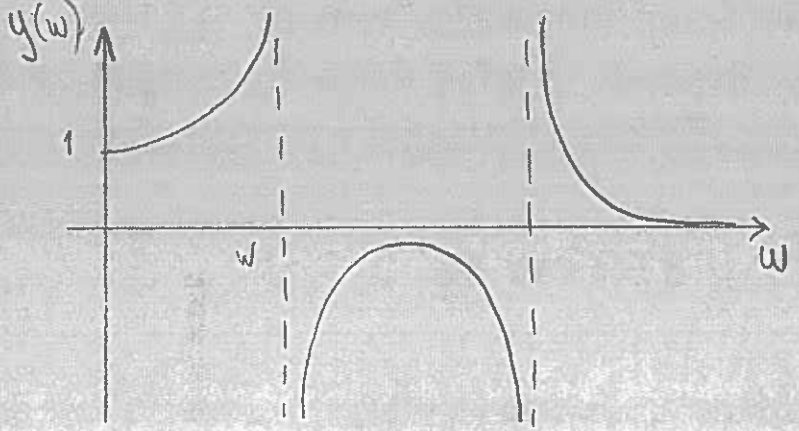
$$\{\phi_2\} = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_2^T [m] \{u\}_2}} \cdot \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -1{,}8883 \\ 0{,}1694 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 25{,}728^2 & 0 \\ 0 & 50{,}379^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1973 & -1{,}8883 \\ 0{,}2671 & 0{,}1694 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

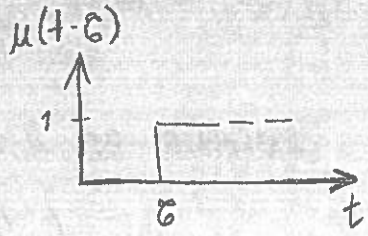
$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 25{,}728^2 & 0 \\ 0 & 50{,}379^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}1973\, M(t) \\ -1{,}883\, M(t) \end{Bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix} 400-0,2\omega^2 & -1200 \\ -1200 & 12000-10\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(\omega) \\ y(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\theta(\omega) = \frac{(12000-10\omega^2)M_0 - 0}{(400-0,2\omega^2)(12000-10\omega^2) - 1200^2}$$



e) $\begin{cases} M(t) = M_0 \cos(\omega t) & , t \leq \varepsilon \\ M(t) = M_0 \cos(\omega t) - \mu(t-\varepsilon) M_1 & , t \leq \varepsilon \end{cases}$



$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25,728^2\, \eta_1(t) = 1,1973\, M(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 50,379^2\, \eta_2(t) = -1,8883\, M(t) \end{cases}$$

i) Para $t \leq \varepsilon$ (Regime harmônico)

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25,728^2\, \eta_1(t) = 1,1973\, M_0 \cos \omega t \\ \ddot{\eta}_2(t) + 50,379^2\, \eta_2(t) = -1,8883\, M_0 \cos \omega t \end{cases}$$

$$\eta(t) = \eta(\omega)\cos(\omega t - \phi) = \frac{F/K}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}} \cdot \cos(\omega t - \phi)$$

$$\eta_1(t) = \frac{\frac{1,1973 M_0}{25,728^2}}{|1-\beta_1^2|} \cos(\omega t - \phi) \quad \text{com } \phi = \begin{cases} \pi & \text{se } \beta_1 > 1 \\ 0 & \text{se } \beta_1 < 1 \end{cases}$$

$$\eta_2(t) = \frac{\frac{-1,8883 M_0}{50,379^2}}{|1-\beta_2^2|} \cos(\omega t - \phi)$$

ii) Para $t > \tau$ (Regime transitorio $\Rightarrow$ degrau)

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25{,}728^2\,\eta_1(t) = 1{,}1973\,M_0\cos(\omega t) + 1{,}1973\,M_1\,\mu(t-\tau) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 50{,}379^2\,\eta_2(t) = -1{,}8883\,M_0\cos(\omega t) - 1{,}8883\,M_1\,\mu(t-\tau) \end{cases}$$

Separando o efeito das forças, sabemos qual a contribuição da parte harmónica, igual à do intervalo anterior ($t < \tau$). Em relação à resposta em degrau, o valor máx da amplitude é $\frac{2F_0}{K}$ → pg. 124

$$\eta_1(\omega) = \frac{2 \times 1{,}1973\,M_1}{25{,}728^2} = 3{,}618 \times 10^{-3}\,M_1$$

$$\eta_2(\omega) = \frac{2 \times (-1{,}8883)\,M_1}{50{,}379^2} = -1{,}488 \times 10^{-3}\,M_1$$

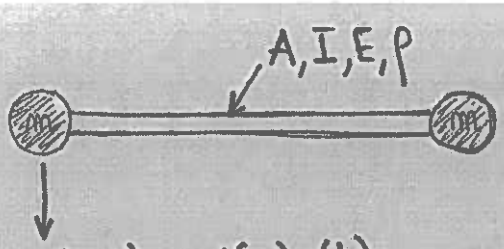
Somando as 2 contribuições, vem que a amplitude máxima é:

$$\begin{cases} \eta_{1\,máx}(\omega) = \left(\dfrac{1{,}809\,M_0}{|1-\beta_1^2|} + 3{,}618\,M_1\right) \times 10^{-3} \\ \eta_{2\,máx}(\omega) = \left(\dfrac{-0{,}744\,M_0}{|1-\beta_2^2|} - 1{,}488\,M_1\right) \times 10^{-3} \end{cases}$$

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow \{x(t)\} = [\phi]\{\eta(t)\}$$

$$\theta_{máx}(t) = \underbrace{\cancel{\phi_{11}}}_{=1{,}1973}\,\eta_{1\,máx} + \underbrace{\cancel{\phi_{12}}}_{=-1{,}8885}\,\eta_{2\,máx}$$

3.



$$v(x,t) = V(x)\,g(t)$$

a) $x = 0 \quad \therefore \quad EI \left.\frac{d^2V(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0$

$$\left.EI\frac{d^3V(x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.m\,\ddot{v}(x,t)\right|_{x=0} = -\omega^2 m\,V(0)$$

$x = \ell \quad \therefore \quad \left.EI\frac{d^2V(x)}{dx}\right|_{x=\ell} = 0$

$$\left.EI\frac{d^3V(x)}{dx}\right|_{x=\ell} = \left.m\,\ddot{v}(x,t)\right|_{x=\ell} = -\omega^2 m\,V(\ell)$$

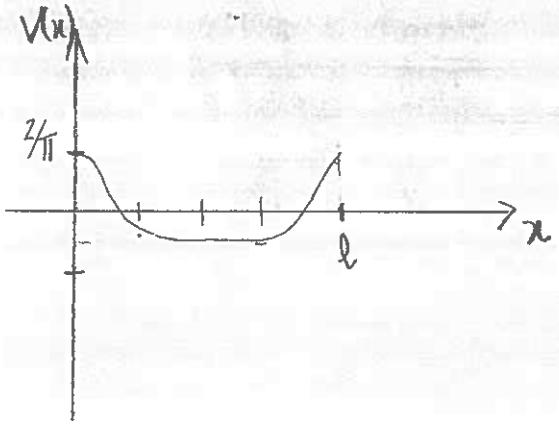
Condições fronteira naturais

b) $V(x) = \frac{2}{\pi} - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right)$

• Derivável 2 vezes (prob de 4ª ordem):

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{\pi}{\ell}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right)$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = +\frac{\pi^2}{\ell^2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right) \quad \checkmark$$

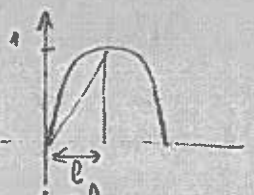


c) Energia potencial:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI\left(\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI\left(\frac{\pi^2}{\ell^2}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right)\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} EI \frac{\pi^4}{\ell^4}\int_0^{\ell} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} EI \frac{\pi^4}{\ell^4}\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{EI}{2}\cdot\frac{\pi^4}{2\ell^3}$$



$$A = \frac{1}{2}\times 1\times \ell$$

Energia cinética:

$$T_{max} = w^2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\ell} \rho A v(x)^2 dx + T_{eq}\right) =$$

$$= w^2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\rho A\left(\frac{2}{\pi} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right)^2 dx + \frac{1}{2} w_m^2\left(v(0)^2 + v(\ell)^2\right)$$

$$= w^2\cdot\frac{1}{2}\rho A\int_0^{\ell}\left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{\ell}x + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right) dx + \frac{1}{2} w_m^2\left(v(0)^2 + v(\ell)^2\right)$$

$$= w^2\cdot\frac{1}{2}\rho A\left(\frac{4}{\pi^2}\cdot x + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\ell}{\pi}\cos\frac{\pi}{\ell}\cdot x + \frac{x}{2}\right)_0^{\ell} + \frac{1}{2} w_m^2\left(v(0)^2 + v(\ell)^2\right)$$

$$= w^2\cdot\frac{1}{2}\rho A\left(\frac{4}{\pi^2}\cdot\ell + \frac{4\ell}{\pi^2}\cos\pi + \frac{\ell}{2}\right) + \frac{1}{2} w_m^2\left(\frac{2^2}{\pi^2} + \frac{2^2}{\pi^2}\right)$$

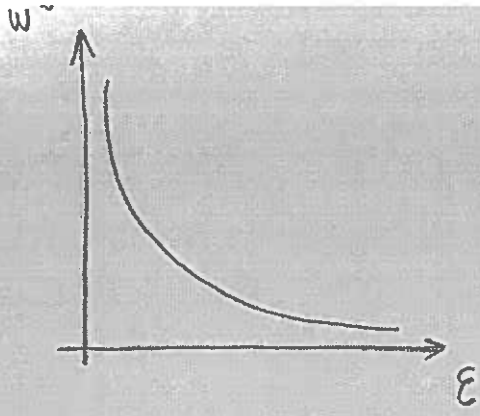
$$= w^2\frac{1}{2}\rho A\left(\frac{4}{\pi^2}\cdot\ell - \frac{4\ell}{\pi^2} + \frac{\ell}{2}\right) + \frac{1}{2} w_m^2\left(\frac{8}{\pi^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} w^2\rho A\frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} w^2\frac{8}{\pi^2} = \frac{1}{2} w^2\left(\rho A\frac{\ell}{2} + \frac{m8}{\pi^2}\right)$$

$V_{máx} = T_{máx}$

$$\frac{EI}{2}\frac{\pi^4}{2\ell^3} = \frac{1}{2} w^2\left(\rho A\frac{\ell}{2} + \frac{m8}{\pi^2}\right)$$

$$R(v(x)) = w^2 = \frac{EI\frac{\pi^4}{2\ell^3}}{\rho A\frac{\ell}{2} + \frac{m8}{\pi^2}} = \frac{\frac{EI\pi^4}{\rho A\ell}\cdot\left(\frac{\pi^4}{2\ell^3}\right)}{\frac{1}{2} + \varepsilon\cdot\frac{8}{\pi^2}}$$



d) Tabela (pg. 359)

Livre - livre : $\beta_i l = 4{,}7300$

$$w_3 = (4{,}730^2)\sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} = 22{,}373\sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}}$$

$$R(V(x))\Big|_{\varepsilon=0} = w^2 = \frac{\pi^{4}/_{2}}{1/2} = 97{,}4$$

$$\downarrow$$

$$w = 9{,}869$$

?

0

ALGO ESTÁ MAL !

Exame - 1ª chamada - 2008-06-11

3. a) A matriz de massa é simétrica e é definida positiva.

A matriz de rigidez é simétrica e normalmente é definida positiva mas no caso de sistemas semi-definidos é designada por matriz semi-definida positiva.

b) São equações desacopladas em termos de inércia e de rigidez mas que só estão desacopladas em termos de amortecimento se a matriz [C] obedecer à condição de Caughey (ou, de forma mais redutora) à condição de amortecimento proporcional. Este desacoplamento torna a obtenção da solução, em termos de coordenadas modais, mais simples porque se pode resolver cada equação diferencial como se resolve uma eq. diferencial de movimento de um sistema com 1 grau de liberdade.

c) Para mostrar isto basta encontrar que os modos [illegible] de vibração são [illegible] independentes e que portanto formam uma base da qual qualquer vector no espaço de dimensão n pode ser definido [illegible] de $x(t)$.

A independência linear fica garantida se todos os vectores forem ortogonais entre si (pela Álgebra). Então basta [illegible] a ortogonalidade dos vectores modais.

Como se sabe: $[M]\{\phi\} = \omega^2 [M]\{\phi\}$

considerando 2 soluções distintas $\{\phi\}_1$ e $\{\phi\}_2$

$$[K]\{\phi\}_\lambda = \omega_\lambda^2 [M]\{\phi\}_\lambda \qquad (1)$$

$$[K]\{\phi\}_n = \omega_n^2 [M]\{\phi\}_n \qquad (2)$$

Pre-multiplicando (1) por $\{\phi\}_n^T$ e (2) por $\{\phi\}_\lambda^T$

$$\{\phi\}_n^T [K]\{\phi\}_\lambda = \omega_\lambda^2 \{\phi\}_n^T [M]\{\phi\}_\lambda \qquad (3)$$

$$\{\phi\}_\lambda^T [K]\{\phi\}_n = \omega_n^2 \{\phi\}_\lambda^T [M]\{\phi\}_n \qquad (4)$$

Aplicando a Transposta a (4) (por ex.):

$$\{\phi\}_n^T [K]\{\phi\}_\lambda = \omega_n^2 \{\phi\}_n^T [M]\{\phi\}_\lambda \qquad (5)$$

pois $[K]$ e $[M]$ são simétricas

Subtraindo (3) e (5)

$$0 = (\omega_\lambda^2 - \omega_n^2)\{\phi\}_n^T [M]\{\phi\}_\lambda \quad , \; n,\lambda = 1,\ldots,n$$

Como $\omega_\lambda^2 \neq \omega_n^2$ para $n \neq \lambda$ e

$$\{\phi\}_n^T [M]\{\phi\}_\lambda = 0 \quad , \; n \neq \lambda$$

Logo, através de (3):

$$\{\phi\}_\lambda^T [K]\{\phi\}_n = 0 \quad , \; n \neq \lambda \qquad \text{c.q.d.}$$

d)

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \alpha [\Phi]^T [m] [\Phi] + \beta [\Phi]^T [K] [\Phi] =$$

$$= \alpha [I] + \beta [\ ] = [2\xi\omega]$$

Então a [illegible] de eq. diferenciais do enunciado na base modal:

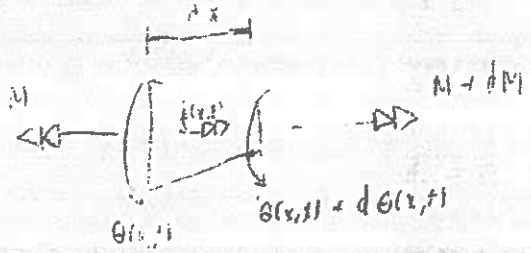
$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\ ] \{\dot{\eta}(t)\} + [\ ] \{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1(t) + \omega_1^2 \eta_1(t) = N_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 2\xi_2 \omega_2 \dot{\eta}_2(t) + \omega_2^2 \eta_2(t) = N_2(t) \end{cases}$$

Sendo:

$$\boxed{\begin{aligned} 2\xi_1 \omega_1 &= \alpha + 2\omega_1^2 \\ 2\xi_2 \omega_2 &= \alpha + 3\omega_2^2 \end{aligned}}$$

1 a)



Pela 2ª lei de Newton: $\Sigma M = \Sigma M$

$$-M + M + dM + f(x,t)\,dx = \rho I_p(x)\,dx \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

Pela Mec. (x) Solidos:

$$M = G I_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \Rightarrow dM = \frac{\partial}{\partial x}\left(G I_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right) dx$$

Substituindo em (1) e dividindo por dx:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G I_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t) = \rho I_p(x) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2}$$

C.q.d.

b) Ao se conseguir separar a equação em 2 influências distintas que nos dão a forma natural de vibração ($\theta(x)$) e a evolução dessa forma ao longo do tempo ($g(t)$) a solução para o a equação diferencial de equilíbrio dinâmico é muito facilitada pois pode-se usar o método de integração de variáveis separáveis.

c)

$$\int_0^l \theta_s(x)\, \rho I_p\, \theta_n(x)\, dx = \delta_{ns} \quad , n,s = 1, \dots, \infty$$

$$\int_0^l \frac{d\theta_s(x)}{dx} G I_p \frac{d\theta_n(x)}{dx} dx = \delta_{ns} \quad , n,s = 1, \dots, \infty$$

Com $\delta_{ns} = \begin{cases} 1 & \text{para } n = s \\ 0 & \text{para } n \neq s \end{cases}$